ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

CHU THỊ HẢI YẾN

TẬP HỢP VÀ CỰC TRỊ TẬP HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

CHU THỊ HẢI YẾN

TẬP HỢP VÀ CỰC TRỊ TẬP HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành:	**Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số:	**8460113**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN NGUYÊN AN

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

Mở đầu **5**

Chương 1. Tập hợp, ánh xạ và tổ hợp **7**

1.1 Tập hợp, ánh xạ 7

1.2 Tổ hợp 9

Chương 2. Cực trị tập hợp **24**

2.1 Một số định lý trong lý thuyết cực trị tập hợp 24

2.2 Một số dạng toán cực trị tập hợp 28

2.2.1 Sử dụng ánh xạ 28

2.2.2 Sử dụng nguyên lý tổ hợp 30

2.2.3 Đếm hai cách 32

2.2.4 Quy nạp - Truy hồi 35

2.2.5 Phương pháp ma trận liên thuộc 37

2.2.6 Khoảng cách Hamming - chặn Plotkin 40

Kết luận **45**

Tài liệu tham khảo **46**

Lời cảm ơn

Trong quá trình làm luận văn, tôi nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Trần Nguyên An - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học khóa Cao học Toán khóa 10Q (2016-2018) - Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Xin trân trọng cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THPT Phạm Ngũ Lão, Thủy Nguyên, Hải Phòng, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả học tập và nghiên cứu.

Lời cuối cùng, tác giả muốn dành để tri ân bố mẹ và gia đình vì đã chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành công việc học tập của mình.

Mở đầu

Khái niệm tập hợp là nền tảng để xây dựng các khái niệm khác như số, hình, hàm số,... trong Toán học. Nghiên cứu lý thuyết tập hợp hiện đại do Cantor và Dedekind khởi xướng vào thập niên 1870. Mục đích đầu tiên của luận văn là nhắc lại một số kiến thức cơ bản về bản số của tập hợp. Từ đó giải thích chi tiết các nguyên lý đếm, và các khái niệm cơ bản của tổ hợp. Nội dung này được kết thúc bằng bài toán đếm số ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh, song ánh giữa các tập hữu hạn.

Mục đích tiếp theo của luận văn là tìm hiểu lý thuyết cực trị tập hợp. Những bài toán trong lý thuyết cực trị tập hợp thường có dạng: cho một tập (hay một họ các tập) $\mathcal{F}$ thỏa mãn một số điều kiện cho trước, tìm max hoặc min của lực lượng của $\mathcal{F}$. Khi nào dấu đẳng thức xảy ra ? Luận văn quan tâm đến một số bài toán. Cho $\mathcal{F}$ là một họ các tập con của một tập có n phần tử X. Để đơn giản ta thường xét X là tập $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Bài toán 1. Giả sử bất kỳ hai phần tử nào của $\mathcal{F}$ cũng có giao khác rỗng. Hỏi giá trị lớn nhất có thể của $|\mathcal{F}|$?

Bài toán 2. Giả sử $A \nsubseteq B$ với mọi phần tử A, B của $\mathcal{F}$. Hỏi giá trị lớn nhất có thể của $|\mathcal{F}|$?

Các bài toán có thêm các điều kiện của $\mathcal{F}$ và các bài toán về cực trị tập hợp liên quan ở phổ thông cũng được tìm hiểu trong luận văn.

Ngoài các phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

- *Chương 1. Tập hợp, ánh xạ và tổ hợp.* Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày về lực lượng của tập hợp, các quy tắc đếm, các quy tắc tổ hợp và giải quyết bài toán đếm ánh xạ giữa các tập hữu hạn. Nguyên lý Dirichlet và một số mở rộng cũng được trình bày trong chương này.

- *Chương 2. Cực trị tập hợp.* Chương này trình bày các Định lý Erdös - Ko - Rado, Định lý Sperner, Bất đẳng thức Lubell - Yamamoto - Meshalkin. Cuối cùng luận văn trình bày một số dạng toán cực trị tập hợp ở phổ thông.

Thái Nguyên, ngày 05 tháng 5 năm 2018

Tác giả

Chu Thị Hải Yến

Chương 1

Tập hợp, ánh xạ và tổ hợp

1.1 Tập hợp, ánh xạ

Tập hợp là một khái niệm nguyên thuỷ (cơ bản) của toán học, không định nghĩa. Ta hiểu *tập hợp* là những vật, những đối tượng của toán học,..., được gom lại do một tính chất chung nào đó. Chẳng hạn, người ta nói "Tập hợp các sinh viên trong một lớp", "tập hợp các lớp học trong một trường học", "tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên", "tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên", "tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ", "tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực",...

Các tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ in hoa: $X, Y, Z, \ldots$. Các vật trong tập hợp gọi là các *phần tử* của tập hợp ấy và thường được ký hiệu bởi các chữ in thường: $x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots$. Tập hợp, phép toán trên tập hợp và một số tính chất là những kiến thức quen thuộc nên ta không nhắc lại ở đây.

Để hiểu đầy đủ hơn về lý thuyết tổ hợp, ta nhắc lại khái niệm ánh xạ, đây cũng là kiến thức chuẩn bị cho chương sau.

Định nghĩa 1.1.1. (i) Một *ánh xạ* f từ tập X đến tập Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$. Khi đó ta viết $f(x) = y$, ta gọi y gọi là *ảnh* của phần tử x bởi ánh xạ f; và ta gọi x là một *tạo ảnh* của phần tử y. Tập X được gọi là *tập nguồn*, tập Y gọi là *tập đích* của ánh xạ f. Để diễn tả ánh xạ f như trên người ta kí hiệu:

$$X \xrightarrow{f} Y,\ x \mapsto f(x) = y,\ \text{hoặc}$$

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x) = y,\ \text{hoặc}$$

$$f : X \to Y$$
$$x \longmapsto f(x) = y.$$

(ii) Ta quy ước rằng có một *ánh xạ rỗng* từ tập $\emptyset$ đến tập Y bất kì.

(iii) Cho ánh xạ $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$. Ta gọi tập hợp con $G(f)$ của $X \times Y$ xác định bởi

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

là *đồ thị* của ánh xạ f.

(iv) Hai ánh xạ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có chung nguồn, chung đích và chung đồ thị. Nói cách khác, cho $f : X \to Y$ và $g : X' \to Y'$ là hai ánh xạ, khi đó $f = g$ nếu $X = X'$, $Y = Y'$ và $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho $f : X \longrightarrow Y,\ x \mapsto y = f(x)$ là một ánh xạ.

(i) f được gọi là *đơn ánh* nếu $f(x) = f(x')$ kéo theo $x = x'$ với mọi $x, x' \in X$.

(ii) f được gọi là *toàn ánh* nếu với mọi $y \in Y$ kéo theo tồn tại $x \in X$ để $f(x) = y$.

(iii) f được gọi là *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Chú ý 1.1.3. Cho X, Y là những tập hợp, ta nói $X \sim Y$ khi và chỉ khi có một song ánh từ X đến Y. Khi đó

(i) $X \sim X$ với mọi tập X;

(ii) Nếu $X \sim Y$ thì $Y \sim X$ với mọi tập X, Y;

(iii) Nếu $X \sim Y$, $Y \sim Z$ thì $X \sim Z$ với mọi tập X, Y, Z;

(iv) Nếu $X \sim X_1$ và $Y \sim Y_1$ thì $X \times Y \sim X_1 \times Y_1$;

(v) Nếu $X \sim X_1$ và $Y \sim Y_1$ và $X \cap Y = X_1 \cap Y_1 = \emptyset$ thì $X \cup Y \sim X_1 \cup Y_1$.

Định lý sau do Cantor nêu lên khi nghiên cứu lý thuyết tập hợp, nhưng Cantor không chứng minh được. Phần thứ hai của định lý được Bernstein chứng minh năm 1897 nên được gọi là Định lý Cantor-Bernstein. Phần thứ nhất của định lý được Zermelo chứng minh năm 1904 sau khi đưa tiên đề chọn vào lý thuyết tập hợp.

Định lý 1.1.4 (Định lý Cantor-Bernstein)**.** *Cho X, Y là những tập hợp, thế thì phải xảy ra ít nhất một trong hai trường hợp sau đây:*

(i) X tương đương với một bộ phận của Y;

(ii) Y tương đương với một bộ phận của X.

Nếu có (i) và (ii) thì X và Y tương đương với nhau.

Định nghĩa 1.1.5. Khi các tập hợp X và Y tương đương với nhau, thì ta nói rằng chúng có cùng một lực lượng hay cùng một bản số. Bản số của X ký hiệu $|X|$ hoặc $\text{Card}(X)$.

Định nghĩa 1.1.6. Một tập hợp không tương đương với bất kỳ một bộ phận thực sự nào của nó được gọi là *một tập hợp hữu hạn.*

Một tập hợp không phải là hữu hạn được gọi là *tập vô hạn.*

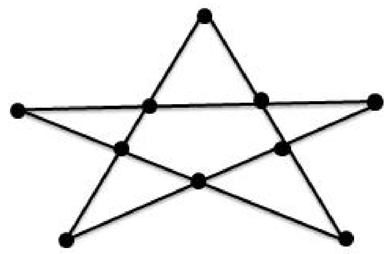
Bản số của một tập hợp hữu hạn được gọi là một số tự nhiên. Tập các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N}$.

Chú ý, hợp, tích đề các của hai tập hữu hạn là một tập hữu hạn. Từ đó ta định nghĩa được phép cộng và nhân trên $\mathbb{N}$. Cho a, b là các số tự nhiên, gọi X, Y là các tập hợp mà $a = |X|$, $b = |Y|$ và $X \cap Y = \emptyset$. Khi đó $a + b = |X \cup Y|$, $ab = |X \times Y|$. Cũng từ đây ta có kết quả sau là điểm khởi đầu của các nguyên lý đếm trong tổ hợp. Cho X, Y là các tập hợp hữu hạn, $X \cap Y = \emptyset$. Khi đó

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

1.2 Tổ hợp

Người ta thương phân biệt nhiều mức độ trong việc giải các bài toán tổ hợp. Mức độ đầu tiên là tìm ít nhất một cách *bố trí* các đối tượng có tính chất đã cho (chẳng hạn bố trí mười điểm nằm trên đoạn thẳng sao cho trên đoạn nào cũng có bốn điểm, như trên hình vẽ).



Nếu bài toán tổ hợp có nhiều lời giải thì vẫn đề đặt ra là *đếm* số lời giải, và mô tả tất cả các lời giải của các bài toán đã cho.

Cuối cùng, nếu các lời giải khác nhau được phân biệt với nhau bởi những tham số nào đó, thì vấn đề đặt ra là tìm lời giải *tối ưu* của bài toán đã cho. Ở đây chúng ta sẽ chỉ giới hạn vào việc đếm số lời giải cuả bài toán tổ hợp.

Để làm việc này, người ta thường áp dụng những công thức thiết lập cho từng loại bài toán. Tất cả các công thức ấy, xét cho cùng, đều dựa trên hai quy tắc đơn giản là quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Định nghĩa 1.2.1 (Quy tắc cộng)**.** Nếu một công việc nào đó có thể thực hiện theo n phương án khác nhau, trong đó: phương án 1 có m_1 cách thực hiện, phương án 2 có m_2 cách thực hiện, ..., phương án thứ n có m_n cách thực hiện. Khi đó, có: $m_1 + m_2 + ... + m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Ta phát biểu quy tắc cộng theo ngôn ngữ tập hợp: Gọi A_1 là tập hợp các đối tượng x_1, A_2 là tập hợp các đối tượng x_2, ..., A_n là tập hợp các đối tượng x_n. Mỗi cách chọn đối tượng x_i ứng với một phần tử của A_i và đảo lại. Điều kiện "cách chọn đối tượng x_i không trùng với bất kỳ đối tượng x_j, $(j \neq i)$" được diễn tả theo ngôn ngữ tập hợp bằng điều kiện: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(i \neq j)$;